**MATEMÁTICAS CCSS II**
**FUNCIONES** **SEPTIEMBRE 2010 B**
**PROBLEMA 4**

**Problema 2.** Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } 1\le x\le 2 \\ 1 & \text{si } 2<x\le 3 \\ -x^2+6x-8 & \text{si } 3<x\le 4 \\ 0 & \text{si } 4<x\le 5 \end{cases}$$

definida en el intervalo $[1,5]$. Se pide:

a) Estudia la continuidad en todos los puntos del intervalo $[1,5]$.

b) Calcula el área de la región del plano limitada por el eje de abscisas, las rectas $x=2$ y $x=4$ y la gráfica de $y=f(x)$.

a) La expresión $y=\frac{2}{x}$ no está definida en $x=0$, pero este punto no se encuentra en el intervalo de definición: $[1,2]$.

Veamos si $f$ es continua en los puntos donde la función cambia de definición:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 1=1 \\ f(2)=\frac{2}{2}=1 \end{array}\right\} f \text{ es continua en } x=2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} -x^2+6x-8=-9+18-8=1 \\ f(3)=1 \end{array}\right\} f \text{ es continua en } x=3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} -x^2+6x-8=-16+24-8=0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 0=0 \\ f(4)=-4^2+6\cdot 4-8=0 \end{array}\right\} f \text{ es continua en } x=4$$

b) Representamos la función entre $x=2$ y $x=4$ para analizar la región que tenemos que calcular:

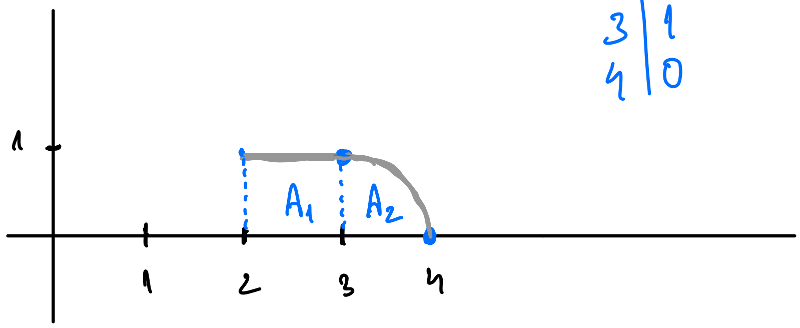
$y=1$ CONSTANTE

$y=-x^2+6x-8$ PARÁBOLA: Como es en el intervalo $[3,4]$ hacemos una tabla de valores y calculamos el vértice:

| x | y |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 4 | 0 |

$x=\frac{-6}{-2}=3 \rightarrow y=1$

MÁX: $(3,1)$




$$\text{Área} = A_1 + A_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\ u^2$$

$A_1$ cuadrado de lado $1 \rightarrow A_1 = 1\ u^2$

$$A_2 = \int_3^4 -x^2+6x-8\,dx = \left. -\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}-8x \right]_3^4 = \left. -\frac{x^3}{3}+3x^2-8x \right]_3^4 =$$

$$= -\frac{4^3}{3}+3\cdot 16-8\cdot 4-\left(-\frac{3^3}{3}+3\cdot 9-8\cdot 3\right) = \frac{2}{3}\ u^2$$