MATEMÁTICAS CCSS II
ÁLGEBRA **JULIO 2019 B**
PROBLEMA 40

Problema 1. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A. *(2 puntos)*
b) Comprueba que A es una matriz ortogonal. *(4 puntos)*
c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(4 puntos)*

a) $$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\left(4+4+4-(-8+1-8)\right) = \frac{1}{27}(12+15) = 1$$

b) $$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$|A|=1$

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

✓

c) $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cancel{A^{-1}\cdot A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$