MATEMÁTICAS II
GEOMETRÍA **JULIO 2013 B**
PROBLEMA 16

Problema B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ y $s:\{x-1=y-2=z$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas. (3 *puntos*).

b) La distancia entre las rectas r y s, (2 *puntos*), **justificando** que las rectas r y s se cruzan. (2 *puntos*).

c) Obtener unas ecuaciones de la recta t que pasa por el punto $\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$ y es perpendicular a las rectas r y s. (3 *puntos*).

a) Pasamos r a paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y+z=0 \\ 3y-z=1 \leftarrow -2E_1+E_2 \end{cases} \qquad r \equiv \begin{cases} x=-2\lambda+1 \\ y=\lambda \\ z=3\lambda-1 \end{cases}$$

$y=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \rightarrow z=3\lambda-1$

$x-\lambda+3\lambda-1=0 \rightarrow x=-2\lambda+1$

$P=(1,0,-1)\in r$

$\vec{v}_r=(-2,1,3)$

$s \equiv x-1=y-2=z \longrightarrow Q=(1,2,0)\in s \quad \vec{v}_s=(1,1,1)$

b) Comprobamos que rango de $M=(\vec{v}_r, \vec{v}_s\ \vec{PQ})=3$ $\qquad \vec{PQ}=(0,2,1)$

$$|M|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+0+6-(0-4+1)=4+4=8\neq 0$$

$\rightarrow rg\,M=3$

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\vec{PQ}]|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{|8|}{\sqrt{4+25+9}}=\frac{8}{\sqrt{38}}=\frac{8\sqrt{38}}{38}=\frac{4\sqrt{38}}{19}\ u$$

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-2,5,-3)$$

c) $t/\ t\perp r,s \rightarrow \vec{v}_t=\vec{v}_r\times\vec{v}_s$

$$t\equiv(x,y,z)=\left(\frac{41}{57},-\frac{14}{57},0\right)+\alpha(-2,5,-3) \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$