MATEMÁTICAS II
GEOMETRÍA **JULIO 2013 A**
PROBLEMA 15

Problema A.2. Se dan las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2-\alpha \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1+\beta \\ z = -1-2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Unas ecuaciones implícitas de r_1. (2 *puntos*).

b) La justificación de que las rectas r_1 y r_2 están contenidas en un plano π, (2 *puntos*) y la ecuación de ese plano π. (2 *puntos*).

c) El área del triángulo de vértices P, Q y R, siendo $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$ y R el punto de intersección de r_1 y r_2. (4 puntos).

a) Expresamos r_1 en forma continua y luego en implícita:

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \to \begin{matrix} x-1=2y \\ -x+1=2z-4 \end{matrix} \to r_1 \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ -x-2z+5=0 \end{cases}$$

b) Estudiamos la p. relativa, si se cortan o si son paralelas, contendrán un plano

$\vec{v}_{r_1} = (2,1,-1)$

$\vec{v}_{r_2} = (0,1,-2)$

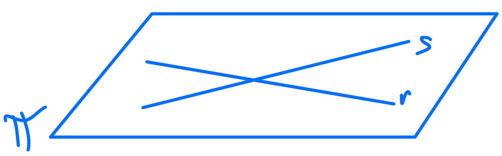
$A = (1,0,2) \in r_1$

$B = (-1,1,-1) \in r_2$

$\vec{AB} = (-2,1,-3)$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to rg\,M = 2$$

Como $\vec{v}_{r_1} \not\parallel \vec{v}_{r_2}$ r_1 y r_2 son secantes



v. directores: $\vec{v}_{r_1}$ y $\vec{v}_{r_2}$

$$\pi \equiv (x,y,z) = (1,0,2) + \alpha(2,1,-1) + \beta(0,1,-2)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) Igualamos r_1 y r_2

$$\begin{cases} 1+2\alpha = -1 \to \alpha = -1 \\ \alpha = 1+\beta \to \beta = -2 \\ 2-\alpha = -1-2\beta \to 2+1 = -1+4 \checkmark \end{cases}$$

$\to R = (-1,-1,3)$

$$\text{Área}_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}\left|\vec{PQ} \times \vec{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9+4+1} = \frac{\sqrt{14}}{2} u^2$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3,-2,-1)$$

$\vec{PQ} = (1,1,1)$ $\vec{PR} = (0,-1,2)$