MATEMÁTICAS II
GEOMETRÍA **SEPTIEMBRE 2011 A**
PROBLEMA 7

Problema A.2. En el espacio se dan las rectas $r:\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano. (*4 puntos*).

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior. (*2 puntos*).

c) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contiene el punto $(1,2,1)$. (*4 puntos*).

a) r y s están contenidas en un plano si son paralelas o secantes, en cualquier caso, la matriz $M=[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ}]$ debe tener rango 2:

$s \equiv \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$ $\quad y=\mu,\ \mu\in\mathbb{R}$, $\ x=1-2\mu$, $\ z=3\mu+2+\alpha$ $\quad \to \quad s\equiv\begin{cases} x=1-2\mu \\ y=\mu \\ z=3\mu+2+\alpha \end{cases}$

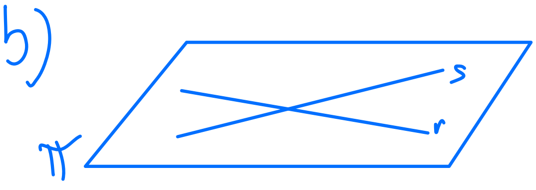
$\vec{v}_r=(1,2,1)$ $\quad \vec{v}_s=(-2,1,3)$ $\quad P=(3,-1,2)\in r$, $\ Q=(1,0,2+\alpha)\in s$ $\quad \to \quad \vec{PQ}=(-2,1,\alpha)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha-12-2-(-2+3-4\alpha)=5\alpha-15=0 \to \alpha=3$$

Si $\alpha=3$, como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \to rg\, M=2$

Además, como $\vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s \to$ r y s son secantes

b)



$\pi \equiv (x,y,z)=(3,-1,2)+a(1,2,1)+b(-2,1,3)$
$a,b\in\mathbb{R}$

c) $r\perp\sigma \to \vec{n}_\sigma=\vec{v}_r=(1,2,1) \to \sigma\equiv x+2y+z+D=0$

$(1,2,1)\in\sigma \to 1+4+1+D=0 \to D=-6 \to \sigma\equiv x+2y+z-6=0$