MATEMÁTICAS II
GEOMETRÍA **JUNIO 2011 A**
PROBLEMA 5

Problema A.2. En el espacio se dan las rectas $r:\begin{cases} x \quad\quad + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} 2x - y \quad\quad = 3 \\ x \ - y - z = 2 \end{cases}$. Obtener **razonadamente**:

a) Un punto y un vector director de cada recta. (*3 puntos*).
b) La posición relativa de las rectas r y s. (*4 puntos*).
c) La ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. (*3 puntos*).

a) Expresamos r y s en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \rightarrow z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad x = 2 - \lambda$$

$$2(2-\lambda) - y + \lambda = 0 \rightarrow y = 4 - \lambda$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \rightarrow x = \mu,\ \mu \in \mathbb{R} \quad y = -3 + 2\mu$$

$$\mu - (-3 + 2\mu) - z = 2 \rightarrow z = 1 - \mu$$

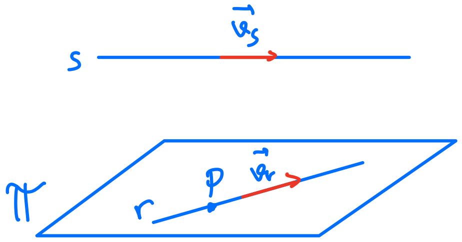
$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -3 + 2\mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$$

$$P = (2,4,0) \in r \quad \vec{v}_r = (-1,-1,1) \qquad Q = (0,-3,1) \in s \quad \vec{v}_s = (1,2,-1)$$

b) Estudiamos el rango de la matriz $M = (\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ})$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad rg\, M = 3 \quad r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

c) Cualquier punto de r es un punto de π y las direcciones son $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$



$$\pi \equiv (x,y,z) = (2,4,0) + \alpha(-1,-1,1) + \beta(1,2,-1) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$