MATEMÁTICAS II
GEOMETRÍA **JUNIO 2010 B**
PROBLEMA 2

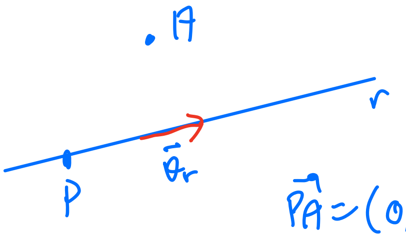
Problema B.2. Sea r la recta de vector director $(2,-1,1)$ que pasa por el punto $P=(0,3,-1)$. Se pide:

a) Hallar razonadamente la distancia del punto $A=(0,1,0)$ a la recta r. (*4 puntos*).

b) Calcular razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r en el punto P. (*4 puntos*).

c) Si Q es el punto donde la recta r corta al plano de ecuación $z=0$, comprobar que el triángulo de vértices APQ tiene ángulos iguales en los vértices P y Q. (*2 puntos*).

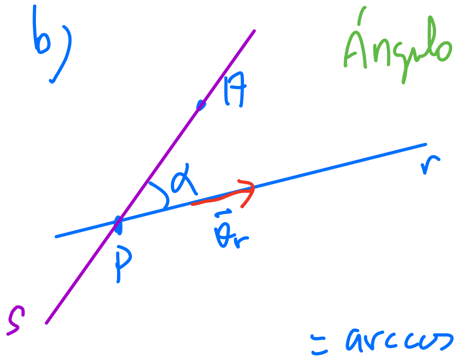
a) Distancia de punto a recta:



$$d(P,r)=\frac{|\vec{PA}\times\vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}=\frac{|(-1,2,4)|}{|(2,-1,1)|}=\frac{\sqrt{1+4+16}}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}}\simeq 1{,}87\ u$$

$$\vec{PA}=(0,-2,1)\rightarrow \vec{PA}\times\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(-1,2,4)$$

b) Ángulo entre rectas:



$\vec{v}_s=\vec{PA}$

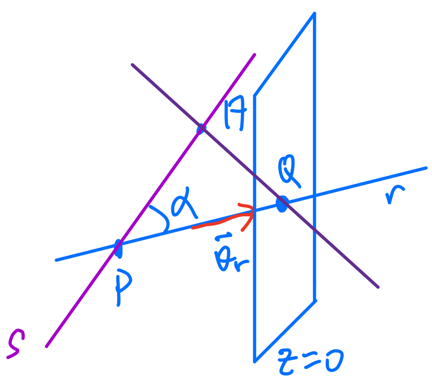
$$\alpha=(\widehat{r,s})=\arccos\frac{|\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s|}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}=$$

$$=\arccos\frac{|(2,-1,1)\cdot(0,-2,1)|}{|(2,-1,1)|\cdot|(0,-2,1)|}=\arccos\frac{|0+2+1|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+1}}=\arccos\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}=57^\circ$$

c) Calculamos $Q=r\cap\{z=0\}$

$$r\equiv\begin{cases}x=2\lambda\\ y=-\lambda+3\\ z=\lambda-1\end{cases}\quad \lambda\in\mathbb{R}\ \rightarrow\ 0=\lambda-1\rightarrow\lambda=1\Rightarrow Q=(2,2,0)$$

$$\hat{P}=\arccos\frac{3}{\sqrt{30}}\simeq 57^\circ \text{ (calculado en b)}$$



$$\hat{Q}=(\widehat{\vec{QP},\vec{QA}})=\arccos\frac{|4-1+0|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+1+0}}=\arccos\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}=$$

$$=\arccos\frac{3}{\sqrt{30}}\simeq 57^\circ$$

$$\left[\vec{QP}=(-2,1,-1)\quad \vec{QA}=(-2,-1,0)\right]$$