MATEMÁTICAS II
GEOMETRÍA **JUNIO 2010 A**
PROBLEMA 1

Problema A.2. Dadas las rectas de ecuaciones

$$r=\begin{cases}5x+y-z=4\\2x-2y-z=-5\end{cases}\qquad \text{y}\qquad s=\begin{cases}x-y=-5\\z\ \ =4\end{cases},$$

se pide:

a) Justificar que las rectas r y s se cruzan. (*4 puntos*).

b) Calcular razonadamente la distancia entre las rectas r y s. (*3 puntos*).

c) Determinar la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s. (*3 puntos*).

a) Expresamos r y s en paramétricas:

$$r\equiv\begin{cases}5x+y-z=4\\2x-2y-z=-5\end{cases}\sim\begin{cases}5x+y-z=4\\3x+3y\quad=9\end{cases}\quad \text{EC1}-\text{EC2}\ \to x+y=3$$

$y=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\to x=3-\lambda$

$15-5\lambda+\lambda-z=4$

$z=11-4\lambda$

$$\to r\equiv\begin{cases}x=3-\lambda\\y=\lambda\\z=11-4\lambda\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}x-y=-5\\z=4\end{cases}\qquad y=\mu\to x=-5+\mu\qquad\to s\equiv\begin{cases}x=-5+\mu\\y=\mu\\z=4\end{cases}$$

Definimos la matriz $M=(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\vec{PQ})$ para comprobar que $\operatorname{rg} M=3$

$\vec{v}_r=(-1,1,-4)$

$\vec{v}_s=(1,1,0)$

$$\left.\begin{array}{l}P=(3,0,11)\in r\\Q=(-5,0,4)\in s\end{array}\right\}\to\vec{PQ}=(-8,0,-7)$$

$$M=\begin{pmatrix}-1&1&-4\\1&1&0\\-8&0&-7\end{pmatrix}$$

$|M|=7+0+0-(32+0-7)=-18\neq0\to\operatorname{rg}M=3$

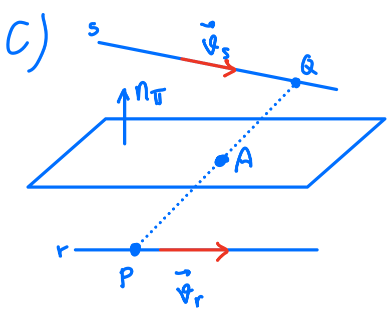
$\to$ r y s se cruzan

b) Distancia entre rectas que se cruzan:

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\vec{PQ}]|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{|-18|}{\sqrt{16+16+4}}=\frac{18}{6}=3u$$

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&1&-4\\1&1&0\end{vmatrix}=(4,-4,-2)$$

c)



Como $r,s\parallel\pi\to\vec{n}_\pi=\vec{v}_r\times\vec{v}_s=(4,-4,-2)$

El punto medio de un punto de r y otro de s es un punto de π

$\pi\equiv4x-4y-2z+D=0$

$A=PM_{\overline{PQ}}=(-1,0,15/2)$

$A\in\pi\to-4-15+D=0\to D=19$

$\to\pi\equiv4x-4y-2z+19=0$