MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JULIO 2021**
PROBLEMA 48

Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 3]$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a. (3 puntos)
b) Una matriz C tal que $AC = 16\,I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$. (4 puntos)
c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{vmatrix} = 3a+2-3(a^2-2)-(3a-6+a^2-2)$

$= \cancel{3a}+2-3a^2+6-\cancel{3a}+6-a^2+2$

$= -4a^2+16=0 \to a=\pm 2$

Si $a \neq \pm 2 \to |A| \neq 0 \to rg A = 3$

Si $a = 2 \to A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = F_1$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to rg A = 2$

Si $a = -2 \to A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = F_1$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to rg A = 2$

b) $C? \mid AC = 16I \quad a=0$

$AC = 16I$

$A^{-1}A\,C = A^{-1} \cdot 16I$

$C = A^{-1} \cdot 16I$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$|A| = 16$

$-4a^2+16$
$a=0$

$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -12 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$(Adj(A))^T = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$C = A^{-1} \cdot 16 \cdot I = \frac{1}{\cancel{16}}\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \cancel{16} \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rg(B) = 1$

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x-2y-3z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ -x-2y-3z=-1 \\ 2x+4y+6z=2 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg\,A = rg\,A' = 1 \neq 3 = n^{\circ}$ incóg.

Por Rouché:

SCI

$$\left(\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ \quad \text{Llamo } \begin{array}{l} z=\alpha \\ y=\beta \end{array} \rightarrow x = 1-2\beta-3\alpha \\ \qquad\qquad\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \end{array} \right)$$

Solución sería esta.
(No se pide en ningún apartado)