MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2021**
PROBLEMA 46

Problema 4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{bmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m. (4 puntos)
b) Explicad cuándo la matriz A es invertible. (2 puntos)
c) Resolved la ecuación $XA = I$ donde I es la matriz identidad en el caso m=1. (4 puntos)

desarrollamos por 2ª fila

a) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} -1 & m \\ 2 & m^2+1 \end{vmatrix} = m(-m^2-1-2m) = 0$

$-m(m^2+2m+1) = 0 \to m=0$, $m = \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} = -1$

Si $m \neq 0,-1 \to |A| \neq 0 \to \text{rg}A = 3$

Si $m=0 \to A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to \text{rg}A = 2$

Si $m=-1 \to A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \to \text{rg}A = 2$

b) A es invertible si $m \neq 0,-1$ porque en estos casos $|A| \neq 0$

(que es la condición de existencia de la inversa de una matriz)

c) $XA = I$ para $m=1 \Rightarrow XAA^{-1} = I \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = m(-m^2-1-2m) \overset{m=1}{=} -4$

$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}}$