MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2021**
PROBLEMA 45

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$x + y + (a+1)z = 2$$
$$x + (a-1)y + 2z = 1$$
$$2x + ay + z = -1$$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a. (5 puntos)
b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

a) $A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array}\right)}_{A} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} =$

$= a-1+4+a(a+1) - (2(a-1)(a+1)+2a+1)$

$= a-\underbrace{1+4}_{3}+a^2+a-(2a^2-2+2a+1)$

$= -a^2+4 = 0 \rightarrow a = \pm 2$

Si $a \neq \pm 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg\,A = 3$
Como $A \subset A'$ y $rg\,A' \leq 3 \rightarrow rg\,A' = 3$
nº incógnitas $= 3$
$\rightarrow$ Rouché: S.C.D.

Si $a = 2 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \rightarrow$ $rg\,A = rg\,A' = 2$
nº incógnitas $= 3$
$\rightarrow$ Rouché: S.C.I.

Si $a = -2 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right) \rightarrow$ $rg\,A = 2$
$rg\,A' = 3$
$\rightarrow$ Rouché: S.I.

b) Si $a = 2 \rightarrow$ S.C.I. Retomamos el sistema del apartado a):

$\left.\begin{array}{l} x+y+3z=2 \\ -z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow z = 1$

$y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow x + \lambda + 3 = 2$

$x = -\lambda - 1$

Si $a \neq \pm 2$ Resolvemos por Cramer:

$$|A| = -a^2 + 4 = -(a-2)(a+2)$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1) - 2 + a(a+1) - \left(-\overbrace{(a-1)(a+1)}^{a^2-1} + 4a + 1\right)$$

$$= 2a - 2 - 2 + a^2 + a + a^2 - 1 - 4a - 1 = 2a^2 - a - 6 = 2(a-2)(a+3)$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} \to 2,\ -3$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 - (a+1) - \left(2(a+1) - \cancel{2} + \cancel{2}\right)$$

$$= 1 + 8 - a - 1 - 2a - 2 = -3a + 6 = -3(a-2)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = -(a-1) + 2 + 2a - \left(4(a-1) + a - 1\right)$$

$$= -\cancel{a} + 1 + 2 + \cancel{2a} - 4a + 4 - \cancel{a} + 1$$

$$= -4a + 8 = -4(a-2)$$

$$\to \quad x = \frac{2\cancel{(a-2)}(a+3)}{-\cancel{(a-2)}(a+2)} = -\frac{2(a+3)}{(a+2)}$$

$$y = \frac{-3\cancel{(a-2)}}{-\cancel{(a-2)}(a+2)} = \frac{3}{a+2}$$

$$z = \frac{-4\cancel{(a-2)}}{-\cancel{(a-2)}(a+2)} = \frac{4}{a+2}$$