MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 44

SEPTIEMBRE 2020 B

Problema 4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 *puntos*)

b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ siendo I la matriz identidad. (3 *puntos*)

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 *puntos*)

a) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ ¿$a, b \,/\, A^{-1} = A^2 + aA + bI$?

$$A^3 - 3A^2 + 3A = I \Rightarrow A\,\underbrace{(A^2 - 3A + 3I)}_{A^{-1}} = I \Rightarrow A^{-1} = A^2 - 3A + 3I \Rightarrow \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \end{array}$$

c) $$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ (1-\lambda) \cdot y = 0 \\ 2y + (1-\lambda)z = 0 \end{array}\right\}$$

$$M' = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad |M| = (1-\lambda)^3 \overset{?}{=} 0 \quad \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1$, $|M| \neq 0 \rightarrow rg\,M = 3$

$M \subset M'$ $rg\,M' \leq 3 \rightarrow rg\,M' = 3$ $\quad \longrightarrow$ Rouché S.C.D

nº incógn $= 3$

Como es homogéneo
(No se pide pero la solución es $(0,0,0)$ para todo $\lambda \neq 1$)

Si $\lambda = 1 \rightarrow M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$ $\quad rg\,M = rg\,M' = 1 \neq 3 =$ nº incógnitas

$\rightarrow$ Rouché : S.C.I

$2y = 0 \rightarrow y = 0$

Llamo $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
Llamo $z = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$

Solución: $(\alpha, 0, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$