MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **SEPTIEMBRE 2020 A**
PROBLEMA 43

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ay+2z &= 3 \\ x-3y+az &= -2, \\ x+y+2z &= a \end{cases}$ donde a es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 *puntos*)
b) La solución del sistema cuando $a = 0$. (3 *puntos*)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)

a) $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{array}\right)$, A

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6+a^2+2-(-6+a+2a) = a^2-3a+2 = 0$

$a = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

• Si $a \neq 1,2 \to |A| \neq 0 \to rg A = 3$
$A \subset A'$, $rg A' \leq 3 \to rg A' = 3$
nº incógnitas $= 3$
$\to$ Rouche: S.C.D.

• Si $a = 1 \to A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} rg A = 2 \\ rg A' = 3 \end{matrix} \to$ Rouche: S.I.

• Si $a = 2 \to A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{0} & \cancel{-5} \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow rg A = rg A' = 2 \neq 3 =$ nº incóg.
$\to$ Rouche S.C.I

Solución: El sistema es compatible si $a \neq 1$

b) Si $a = 0 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & \boxed{0} & -2 \\ \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & -3 \end{array}\right) \to \left.\begin{matrix} x+2z=3 \\ x-3y=-2 \\ y=-3 \end{matrix}\right\}$

$\to -11+2z=3 \to z=7$
$\to x+9=-2 \to x=-11$

Solución: $(-11,-3,7)$

c) Si $a=2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{0} & \cancel{-5} \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$ $\left.\begin{matrix} x+2y+2z=3 \\ -y=-1 \end{matrix}\right\} \to y=1$

$z=\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$
$x+2+2\lambda=3$
$x=1-2\lambda$

Solución: $(1-2\lambda, 1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$