MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 41

JULIO 2020 A

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$, siendo a un parámetro real, **obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El estudio del sistema en función del parámetro a. (5 *puntos*)
b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$. (3 *puntos*)
c) La solución del sistema cuando $a = 0$. (2 *puntos*)

a) $A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix} \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - (a^3 + 1 + 1) =$$
$$= -a^3 + 3a - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \nearrow -2 \\ \searrow 1 \end{cases}$$

- Si $a \neq -2, 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$
  Como $A \subset A'$, $rg\, A' \leq 3 \rightarrow rg(A') = 3$
  nº incógnitas $= 3$
  $\rightarrow$ Rouché S.C.D.

- Si $a = -2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow rg\, A = rg\, A' = 2$
nº incógnitas $= 3$
$\rightarrow$ Rouché S.C.I.

- Si $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$rg\, A = 1$
$rg\, A' = 2$
$\rightarrow$ Rouché S.I.

b) $a=-2$ Retomamos la discusión:

$$A' \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-2z=1 \\ -3y+3z=0 \end{array}\right\}$$

$y=\lambda \quad z=\lambda \qquad \lambda\in\mathbb{R}$

$x+\lambda-2\lambda=1 \longrightarrow x=\lambda+1$

c) $a=0 \longrightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ -y+z=0 \\ 2z=-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longrightarrow x-1=1 \longrightarrow x=2 \\ \longrightarrow y=-1 \\ \longrightarrow z=-1 \end{array}$$