MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JULIO 2019 B**
PROBLEMA 40

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+4y \\ -x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} x+4y=\alpha x \\ -x+6y=\alpha y \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} (1-\alpha)x+4y=0 \\ -x+(6-\alpha)y=0 \end{matrix}\right\}$

$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$

$|A| = (1-\alpha)(6-\alpha)+4 = 6-\alpha-6\alpha+\alpha^2+4 =$
$= \alpha^2-7\alpha+10 \overset{?}{=} 0$

$\alpha = \dfrac{7\pm\sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7\pm3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$

Si $\alpha \neq 2, 5$ $|A| \neq 0$ $rg\,A = 2$
Como el sistema es homogéneo $rg\,A = rg\,A'$
Como nº incógnitas $= 2$
$\rightarrow$ Por el teorema de Rouché S.C.D.
(Solución: $x=0$ $y=0$)

El sistema solo admite una solución cuando $\alpha \neq 2, 5$

b) $AX = 5X \rightarrow \alpha = 5 \rightarrow \left.\begin{matrix} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$
$x = \lambda$

c) $AX = 2X$
$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓

$2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calcular β / $A^{100}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$A^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = A\cdot 2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 2\cdot 2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 2^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$A^3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = A\cdot A^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = A\cdot 2^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 2^2\cdot A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 2^2\cdot 2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 2^3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 2^n\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{100} = 2^{100}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \beta = 2^{100}$$