MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2019 A**
PROBLEMA 37

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *puntos*)

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = a(a+1) - 2a(a-1) - (-3a(a+1) + 2(a-1)) =$

$= a^2 + a - 2a^2 + \cancel{2a} + 3a^2 + 3a - \cancel{2a} + 2 =$

$= 2a^2 + 4a + 2 = 0$

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{4} = -1$

Si $a \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg\,A = 3$

Si $a = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow rg\,A = 2$

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$|A| \cdot |A^{-1}| = |A \cdot A^{-1}| = |I| = 1$

$\hookrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$|2A^{-1}| = 2 \cdot 2 \cdot 2\,|A^{-1}| = 8 \cdot \frac{1}{|A|} = 8\,\frac{1}{8} = 1$

$a = 1$

Extraemos un 2 de cada fila.

$|A| = 2a^2 + 4a + 2$

$a = 1 \rightarrow |A| = 2 + 4 + 2 = 8$

b) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $a = -1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - z \\ -2x + 2z \\ -3x - 2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{array}\right\}$ GAUSS

c) $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B \rightarrow B^2 + 2B = \frac{1}{3} I \rightarrow 3B^2 + 6B = I \xrightarrow{\text{CLAVE}} B(\underbrace{3B + 6I}) = I$

¿B^{-1}?

$B^{-1} = 3B + 6I$ $m = 3$, $n = 6$