MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JULIO 2018 B**
PROBLEMA 36

Problema B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$ (4 *puntos*).

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$ (2 *puntos*).

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (4 *puntos*).

a) $AB=A$ y $BA=B \longrightarrow A^2=A \quad B^2=B$?

$$A^2 = A\cdot A \underset{\substack{1^{a}\text{ COND}\\ A=AB}}{=} \underbrace{AB}\cdot A \underset{\substack{2^{a}\text{ COND}\\ BA=B}}{=} A\cdot B \underset{1^{a}\text{ COND}}{=} A \qquad B^2 = B\cdot B \underset{\substack{2^{a}\text{ COND}\\ B=BA}}{=} BA\cdot B \underset{\substack{1^{a}\text{ COND}\\ A\cdot B=A}}{=} B\cdot A \underset{2^{a}\text{ COND}}{=} B$$

b) $B^2=B \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2=a \rightarrow a^2-a=0 \rightarrow a(a-1)=0 \\ 0=0 \checkmark \\ a+b=1 \checkmark \\ b^2=b \checkmark \end{array}\right. \qquad a=0 \quad a=1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a=0 \rightarrow b=1 \\ a=1 \rightarrow b=0 \end{array}}$$

Como se debe cumplir:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a \neq 1$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow b \neq 0$

La solución será la dada por $\Rightarrow \boxed{a=0 \quad b=1}$

c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 = 6$

$C_1 = C_2 + C_3$

$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}^{\,0} = 3$