MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JULIO 2018 A**
PROBLEMA 35

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$, donde a es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible (5 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$ (3 *puntos*).
c) La solución del sistema cuando $a = 0$ (2 *puntos*).

a) $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array} \right)$, con A la matriz de los coeficientes.

$|A| = (a-1)^2 + 1 + 0 - (0 + a + 0)$
$= a^2 - 2a + 1 + 1 - a = a^2 - 3a + 2 \stackrel{?}{=} 0$

$a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

• Si $a \neq 1,2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg } A = 3$
Como $A \subset A'$ y $\text{rg } A' \leq 3$, $\text{rg } A' = 3$
nº incógnitas $= 3$
$\rightarrow$ Rouché: S.C.D.

• Si $a = 1 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad \text{rg } A = \text{rg } A' = 2$
nº incógnitas $= 3$
$\rightarrow$ Rouché: S.C.I.

• Si $a = 2 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ $\quad \text{rg } A = 2 \neq 3 = \text{rg } A'$
$\rightarrow$ Rouché: S.I.

$\Rightarrow$ El sistema es compatible si $a \neq 2$
(SCD si $a \neq 1,2$ y SCI si $a = 1$)

b) Si $a=1$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x+z=0 \end{matrix}\right\}$ $\quad \begin{matrix} x=\lambda, \ \lambda\in\mathbb{R} \\ y=1-\lambda \\ z=-\lambda \end{matrix}$

c) Si $a=0$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ -y+z=0 \\ -2z=-1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \longrightarrow x+1/2=1 \longrightarrow x=1/2 \\ \longrightarrow y=1/2 \\ \longrightarrow z=1/2 \end{matrix}$$