MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JULIO 2017 A**
PROBLEMA 31

Problema A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que la matriz A es invertible (2 *puntos*)
y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I. (2 *puntos*)

b) Los valores posibles del determinante de B. (3 *puntos*)

c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa. (3 *puntos*)

a) $A^2 = -A - I$

$\rightarrow I = -A - A^2$

$I = A\underbrace{(-I - A)}_{A^{-1}} \Rightarrow A^{-1} = -I - A$ (A es invertible)

$A^3 = ?$ $\quad A^3 = A \cdot A^2 = A(-A - I) = -A^2 - A = -(-A - I) - A =$
$= A + I - A = I$

b) $2B^3 = B$ $\quad$ ¿$|B|$?

$\rightarrow |2B^3| = |B| \rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot |B^3| = |B| \rightarrow 8|B|^3 = |B|$

$8x^3 = x$
$8x^3 - x = 0$
$x(8x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0$
$x = \pm\sqrt{1/8}$

$\rightarrow 8|B|^3 - |B| = 0 \rightarrow |B|(8|B|^2 - 1) = 0$

$|B| = 0$ $\quad$ $|B| = \pm\sqrt{1/8}$

$\Rightarrow |B| = 0, \ \sqrt{1/8}, \ -\sqrt{1/8}$

c) $|B^2| = |B|^2 = \left(\pm\sqrt{1/8}\right)^2 = \frac{1}{8}$

$|B| \neq 0$

$\exists B^{-1}$