MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2017 B**
PROBLEMA 30

Problema B.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3, (2,5 *puntos*)

y el cálculo de la matriz C^4. (2,5 *puntos*)

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1. (3 *puntos*)

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $BB = B$. (2 *puntos*)

a) $$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$C^4 = (2C-I)(2C-I) = 4C^2 - 2C - 2C + I = 4C^2 - 4C + I =$$

$$= 4(2C-I) - 4C + I = 8C - 4I - 4C + I = 4C - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $$|(3A^4)(4A^2)^{-1}| = |3A^4|\cdot|(4A^2)^{-1}| = 3^4|A^4|\cdot\frac{1}{|4A^2|} = 3^4|A^4|\frac{1}{4^4|A^2|} =$$

$$= \frac{3^4}{4^4}\cdot\frac{|A|^4}{|A|^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^4|A|^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\cdot(-1)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$$

c) $$B\cdot B = B \underset{\text{Admite inversa}}{\longrightarrow} B^{-1}\cdot B\cdot B = B^{-1}\cdot B \longrightarrow \boxed{B = I}$$