MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2017 A**
PROBLEMA 29

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$, dependiente del parámetro real a.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $a = 2$. (3 *puntos*)

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a. (2+2 *puntos*)

a) $a=2$

$$\begin{cases} -x+2y+2z=2 \\ 2x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{-1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \div 3 \\ \div 3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} -x+2y+2z=2 \\ 2y+z=2 \\ -3y=-2 \end{array}\right\} \to y=\frac{2}{3}$$

$$2\cdot\frac{2}{3}+z=2 \to z=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

$$-x+2\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}=2 \to -x=2-\frac{8}{3}$$

$$\to -x=\frac{-2}{3} \to x=\frac{2}{3}$$

b) $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{array}\right)$, $\underbrace{}_{A}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2a-a^2-4-(2a^2-1+4a)$$

$$=-3a^2-6a-3=0$$

$$\to a^2+2a+1=0$$

$$a=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-1$$

- Si $a \neq -1 \to |A| \neq 0 \to rgA=3$
  Como $A \subset A'$, $rgA' \leq 3 \to rgA'=3$
  nº incógnitas $=3$
  $\Big\} \to$ Por Rouché: S.C.D.

c) Para $a=-1$ el sistema será S.I o S.C.I :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \boxed{-1} & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg\,A = rg\,A' = 2 \neq 3 =$ nº incógnitas

Por Rouché S.C.I.

Resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} -x - y + 2z = -1 \\ -3y + 3z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow z = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow y = \lambda$$

$$-x - \lambda + 2\lambda = -1$$

$$x = \lambda + 1$$