MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JULIO 2016 A**
PROBLEMA 27

Problema A.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2, \\ 2x + \alpha y - 5z = -4 \end{cases}$ donde α es un parámetro real. Obtener <u>**razonadamente**</u>, <u>**escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**</u>:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = 0$. (3 *puntos*)
b) El valor del parámetro α para el que el sistema es incompatible. (3 *puntos*)
c) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado (2 *puntos*)
y obtener la solución del sistema en función del parámetro α. (2 *puntos*)

a) $\alpha = 0$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x - 5z = -4 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \textcircled{-1} & -6 \\ 2 & 0 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & -1 & -6 \\ 27 & 0 & 0 & 26 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ -5x - z = -6 \\ 27x = 26 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{26}{27}$$

$$\rightarrow -5\left(\frac{26}{27}\right) - z = -6$$

$$-z = -6 + \frac{130}{27} \rightarrow -z = \frac{-162+130}{27} \rightarrow$$

$$\rightarrow -z = \frac{-32}{27} \rightarrow z = \frac{32}{27}$$

$$\frac{26}{27} + y + 2\left(\frac{32}{27}\right) = 2 \rightarrow y = 2 - \frac{26}{27} - \frac{64}{27} = 2 - \frac{90}{27} = \frac{-36}{27} = -\frac{4}{3}$$

b) Discutimos el sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ \underbrace{2 \quad \alpha \quad -5}_{A} & & & -4 \end{array}\right) \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & -5 \end{vmatrix} = -10 + 6 - 6\alpha - (8 + 3\alpha + 15)$$

$$= -4 - 6\alpha - (23 + 3\alpha) = -9\alpha - 27 = 0 \rightarrow \alpha = -3$$

- Si $\alpha \neq -3 \rightarrow |A| \neq 0$, $rg(A) = 3$
  Como $A \subset A'$ y $rgA' \leq 3$, $rg(A') = 3$
  nº incógnitas $= 3$
  $\rightarrow$ Por Rouché: SCD

$$\bullet \text{ Si } \alpha = -3 \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \textcircled{5} & 9 & 4 \\ 0 & -5 & -9 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} rg\, A = 2 \\ rg\, A' = 3 \end{array}\right| \rightarrow \text{Por Rouché: S.I.}$$

Para $\alpha = -3$ el sistema es incompatible

c) El sistema es S.C.D si $\alpha \neq -3$ (apartado b))

Solución: (Por Cramer)

$|A| = -9\alpha - 27$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & \alpha & -5 \end{vmatrix} = -20 - 12 - 4\alpha - (-16 + 6\alpha + 10)$$
$$= -32 - 4\alpha + 6 - 6\alpha = -26 - 10\alpha \Rightarrow x = \frac{-26 - 10\alpha}{-9\alpha - 27} = \frac{26 + 10\alpha}{9\alpha + 27}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 10 + 12 + 24 - (-8 - 12 + 30)$$
$$= 46 - (10) = 36 \Rightarrow y = \frac{36}{-9\alpha - 27} = \frac{-4}{\alpha + 3}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & \alpha & -4 \end{vmatrix} = -8 - 6\alpha - 4 - (8 - 2\alpha + 12)$$
$$= -12 - 6\alpha - 20 + 2\alpha = -4\alpha - 32 \Rightarrow z = \frac{-4\alpha - 32}{-9\alpha - 27} = \frac{4\alpha + 32}{9\alpha + 27}$$