MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2016 B**
PROBLEMA 26

Problema B.1. Se da la matriz $A=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $A^{-1}=5^{-1}A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. (4 *puntos*)

b) Los valores del parámetro real λ para los cuales $A-\lambda I$ no es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 *puntos*)

c) El determinante de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que 0 y verifica la ecuación $B^{-1}=B^t$. (3 *puntos*)

a) $|A|=\begin{vmatrix}\sqrt5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=\sqrt5\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=\sqrt5(1+4)=5\sqrt5\neq0 \quad \exists A^{-1}$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&-2\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\sqrt5&0\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\sqrt5&0\\0&2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&0\\1&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\sqrt5&0\\0&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\sqrt5&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&\sqrt5&-2\sqrt5\\0&2\sqrt5&\sqrt5\end{pmatrix}\rightarrow (Adj(A))^t=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&\sqrt5&2\sqrt5\\0&-2\sqrt5&\sqrt5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5\sqrt5}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&\sqrt5&2\sqrt5\\0&-2\sqrt5&\sqrt5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0&0\\0&1/5&2/5\\0&-2/5&1/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}{5}&0&0\\0&1/5&2/5\\0&-2/5&1/5\end{pmatrix}$$

$$\frac15A^t=\frac15\begin{pmatrix}\sqrt5&0&0\\0&1&2\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}{5}&0&0\\0&1/5&2/5\\0&-2/5&1/5\end{pmatrix}$$

✓

b) $A-\lambda I=\begin{pmatrix}\sqrt5&0&0\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt5-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&-2\\0&2&1-\lambda\end{pmatrix}$

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\sqrt5-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&-2\\0&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(\sqrt5-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(\sqrt5-\lambda)\left((1-\lambda)^2+4\right)=0$

$\lambda=\sqrt5 \qquad (1-\lambda)^2+4=0$
$(1-\lambda)^2=-4 \quad \nexists$

$\Longrightarrow A-\lambda I$ No es invertible si $\lambda=\sqrt5$

c) $B^{-1}=B^t \rightarrow |B^{-1}|=|B^t| \rightarrow \frac{1}{|B|}=|B| \rightarrow |B|^2=1 \rightarrow |B|=\pm1$

La solución es mayor que cero: $\boxed{|B|=1}$