MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2016 A**
PROBLEMA 25

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax - z = a \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es incompatible. (4 *puntos*)
b) Todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)
c) La solución del sistema cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

a) $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} a & 0 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} a \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right.\right)$ $|A| = a^2 - (-2a) = a^2 + 2a \overset{?}{=} 0 \to a(a+2) = 0$

$a = 0 \quad a = -2$

Si $a \neq 0, -2 \to |A| \neq 0$, $rg(A) = 3$
$A \subset A'$, $rg A' \leq 3 \to rg(A') = 3$
nº incógnitas $= 3$
$\to$ Por Rouché S.C.D

Veamos si el sistema es incompatible para $a = 0$ o $a = -2$:

• Si $a = 0$ $A' = \left(\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right.\right)$ $rg A = 2$, $rg A' = 3$ $\to$ Por Rouché S.I.

• Si $a = -2$ $A' = \left(\begin{matrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right.\right)$ $rg A = rg A' = 2$, nº incógnitas $= 3$ $\to$ Por Rouché S.C.I

F_1 proporcional F_3

Sistema incompatible para $a = -2$

b) El sistema es indeterminado para $a = -2$

$A' = \left(\begin{matrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right.\right) \to \begin{cases} -2x - z = -2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$

$x = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$
$z = 2 - 2\lambda$
$2\lambda - 2y + 2 - 2\lambda = 1$
$-2y = 1 \to y = -1/2$

$\boxed{(\lambda, -1/2, 2 - 2\lambda)\ \lambda \in \mathbb{R}}$

c) Si $a = -1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2 \\ F_1 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ -x - z = -1 \\ x = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow 2 - y + 0 = 1 \\ \to z = 0 \qquad y = 1 \end{array}$$

$$\boxed{(1, 1, 0)}$$