MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 23

JULIO 2015 A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha + 3 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)
b) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 0$. (3 *puntos*)
c) El valor de α para el que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

a) $\alpha = -1 \rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 3 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+z=-1 \\ -2y=2 \\ 7y-3z=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y=-1 \\ \rightarrow -7-3z=3 \end{array}$

$z = -10/3$

$x - 1 - 10/3 = -1 \rightarrow x = 10/3$

b) $\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 2x - z = 3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \textcircled{1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+z=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \rightarrow y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

$x = 1 - \lambda$

$1 - \lambda + 3\lambda + z = 0 \rightarrow z = -1 - 2\lambda$

c) $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 & 2\alpha+3 \end{array}\right)$, $\underbrace{}_{A}$

$|A| = -1 - 6\alpha + \alpha - (2 - \alpha^2 - 3) = \alpha^2 - 5\alpha \overset{?}{=} 0$

$\alpha(\alpha - 5) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 5 \end{cases}$

Si $\alpha \neq 0, 5$ $rg A = rg A' = 3 =$ nº inc $\rightarrow$ Rouché S.C.D

Si $\alpha = 0$ El sistema es S.C.I (por el apartado b)

$$\text{Si } \alpha=5 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \enclose{circle}{1} & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \\ 0 & \enclose{circle}{-1} & -3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\text{rg } A = 2 \neq 3 = \text{rg } A' \Rightarrow \text{Si } \alpha=5$$

Por Rouché el
sistema es
INCOMPATIBLE