MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 20

JULIO 2014 B

Problema B.1. Se tiene el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (1-\alpha)x+2y+\ \ z & = \ \ 4 \\ \quad x+y-\ \ 2z & = -4 \\ \quad x+4y-(\alpha+1)z & = -2\alpha \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es incompatible. (3 *puntos*).

b) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*).

c) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 2$. (4 *puntos*).

a) b)

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -(\alpha+1) & -2\alpha \end{array}\right) \qquad \underbrace{}_{A}$$

$$|A| = -(1-\alpha)(\alpha+1) - \cancel{4} + \cancel{4} - (1 - 8(1-\alpha) - 2(\alpha+1))$$

$$= -(\cancel{\alpha} + 1 - \alpha^2 - \cancel{\alpha}) - (1 - 8 + 8\alpha - 2\alpha - 2) =$$

$$= -1 + \alpha^2 - (-9 + 6\alpha) = \alpha^2 - 6\alpha + 8 \overset{?}{=} 0$$

$$\alpha = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \nearrow 4 \\ \searrow 2 \end{cases}$$

Si $\alpha \neq 2, 4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg A = 3$

Como $A \subset A'$, $rg A' \leq 3 \rightarrow rg A' = 3$

nº incógnitas $= 3$

$\rightarrow$ Rouché : S.C.D (Solución ap. b))

Si $\alpha = 4$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & \textcircled{1} & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 5 & 0 & 4 \\ -14 & 14 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

$rg A = 2 \neq 3 = rg A'$ Rouché : S.I

(Solución ap. a))

Si $\alpha = 2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{-1} & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$rg A = rg A' = 2 \neq 3 =$ nº incógnitas

Rouché: S.C.I

c) Retomamos el apartado anterior:

Si $\alpha = 2 \leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -x+2y+z=4 \\ 3y-z=0 \end{array}\right\}$

$y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$z = 3\lambda$

$-x + 2\lambda + 3\lambda = 4 \rightarrow x = 5\lambda - 4$