MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JULIO 2014 A**
PROBLEMA 19

Problema A.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del determinante de la matriz $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, (2 *puntos*) y la matriz S^{-1}, que es la matriz inversa de la matriz S. (2 *puntos*). Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz S sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa S^{-1}. (1 *punto*).

b) El determinante de la matriz $\left(4\left(T^{2}\right)\right)^{-1}$, sabiendo que T es una matriz cuadrada de 3 filas y que 20 es el valor del determinante de dicha matriz T. (3 *puntos*).

c) La solución a de la ecuación $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$. (2 *puntos*).

a) $|S|=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10+2+3-(-1+6-10) = 15-(-5) = 20$

S^{-1} → Existe porque $|S|\neq 0$ $\quad S^{-1}=\frac{1}{|S|}\cdot (Ad(S))^t$ $\quad$ Esta fórmula es válida si $|S|\neq 0$

$$Ad(S)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 13 & 11 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (Ad(S))^t=\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & 13/20 & -3/20 \\ -3/10 & 11/20 & -1/20 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

b) $$\left|\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}\right| = \frac{1}{|4(T^2)|} \underset{\text{4 factor común de 3 filas}}{=} \frac{1}{4^3\,|T^2|} = \frac{1}{4^3\cdot|T|^2} = \frac{1}{4^3\cdot 20^2} = \frac{1}{25600}$$

c) Igualando elemento a elemento:

$a=a$ ✓
$a^2-1=a+1$
$-3=-3$ ✓
$a+1=a^2-1$ ← 2ª ec ✓
$2=2$ ✓
$a^2+4=4a$
$-3=-3$ ✓
$4a=a^2+4$ ← 6ª ec
$1=1$ ✓

$\left.\begin{array}{l} a^2-1=a+1 \\ a^2+4=4a \end{array}\right\}$ → $a^2-a-2=0$

$a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=$ 2, -1

$a^2-4a+4=0$

$a=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2$

$\boxed{a=2}$ cumple todas las ecuaciones