MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JULIO 2013 B**
PROBLEMA 16

Problema B.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 7$. (4 *puntos*).
b) Los valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado. (3 *puntos*).
c) Los valores de α para los cuales el sistema es compatible determinado. (3 *puntos*).

a) $\alpha = 7 \to \begin{cases} 7x + y + z = 1 \\ x + 7y + z = 1 \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} 7x + y + z = 1 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$

$x = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\to y = \lambda$

$7\lambda + \lambda + z = 1$

$z = 1 - 8\lambda$

b) c) Discusión del sistema:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$, con A la matriz de las tres primeras columnas.

$|A| = \alpha^2 + 3 + 5 - (3\alpha + 5\alpha + 1) = \alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0$

$\alpha = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \dfrac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$

$\alpha \neq 7, 1 \to |A| \neq 0 \to rg(A) = 3$
Como $A \subset A'$, $rg A' \leq 3 \to rg(A') = 3$
nº incógnitas $= 3$
$\to$ Rouché: S.C.D

$\alpha = 7 \to$ S.C.I (por el apartado a)

$\alpha = 1 \to A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$

$rg A = rg A' = 2$
nº incógnitas $= 3$
$\Longrightarrow$ Rouché: SCI.

Solución: b) Si $\alpha = 1, 7 \to$ S.C.I.

c) Si $\alpha \neq 1, 7 \to$ S.C.D.