Problema A.1. Comprobar **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado** que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, es decir que $AB = BA$, entonces se deduce que $A^2B^2 = (AB)^2$. (2 *puntos*).

b) Que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3A + 2I = O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula, (4 *puntos*), y que una matriz A tal que $A^2 - 3A + 2I = O$ tiene matriz inversa. (2 *puntos*)

c) Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, los valores α y β tales que $A^3 = \alpha A + \beta I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 - 3A + 2I = O$. (2 *puntos*).

a) Si $AB = BA \rightarrow A^2B^2 = (AB)^2$

$$A^2 \cdot B^2 = A \cdot \underbrace{A \cdot B} \cdot B = A \cdot (A \cdot B) \cdot B = A \cdot \underbrace{(B \cdot A)}_{\text{Conmutan}} \cdot B = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = (A \cdot B)^2$$

b) $A^2 - 3A + 2I = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16-30 & -40+70 \\ 0 & 12-21 & -30+49 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -30 \\ 0 & 9 & +21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & -19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -30 \\ 0 & 9 & +21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-3+2 & 0 & 0 \\ 0 & -14+12+2 & 30-30 \\ 0 & -9+9 & -19+21+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Necesitamos "$A \cdot M = I$" $\longrightarrow$ $M = A^{-1}$

$$A^2 - 3A + 2I = 0$$

$$A^2 - 3A = -2I$$

$$A(A - 3I) = -2I$$

$$A\left(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) = I \longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$$

c) $\alpha, \beta \,/\, A^3 = \alpha A + \beta I$

Sabiendo que: $A^2 - 3A + 2I = 0$

$$A^2 - 3A + 2I = 0 \rightarrow A^2 = 3A - 2I$$

$$\longrightarrow A^3 = A(3A - 2I) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A =$$

Multiplicando por A

$$= 9A - 6I - 2A = 7A - 6I$$

$$\Rightarrow \alpha = 7$$

$$\beta = -6$$