MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2013 B**
PROBLEMA 14

Problema B.1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\1&1&0\\4&2&-2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&-1&5\\0&0&2\end{pmatrix}$, obtener **razonadamente** el valor de los determinantes siguientes, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$. (4 *puntos*).

b) $|(A+B)^{-1}A|$ y $|A^{-1}(A+B)|$. (3 *puntos*).

c) $|2ABA^{-1}|$ y $|A^3B^{-1}|$. (3 *puntos*).

a) $A+B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&5\\4&2&0\end{pmatrix}$

$|A+B|=0+20+4-(0+0+0)=24$

$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |(A+B)^{-1}| = \frac{1}{8}\frac{1}{|A+B|} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{192}$

$\frac{1}{2}$ factor común de tres filas

b) $|(A+B)^{-1}\cdot A| = |(A+B)^{-1}|\cdot|A| = \frac{1}{24}\cdot 4 = \frac{1}{6}$

$|A|=\begin{vmatrix}-2&0&0\\1&1&0\\4&2&-2\end{vmatrix} = (-2)\cdot 1\cdot(-2) = 4$

Triangular

$|A^{-1}(A+B)| = |A^{-1}|\cdot|(A+B)| = \frac{1}{|A|}\cdot|A+B| = \frac{1}{4}\cdot 24 = 6$

c) $|2A\cdot BA^{-1}| = 2^3\,|A\cdot B\cdot A^{-1}| = 8\,|A|\cdot|B|\cdot|A^{-1}| = 8\,\cancel{|A|}\cdot|B|\cdot\frac{1}{\cancel{|A|}} = 8\cdot(-4) = -32$

$|A^3\cdot B^{-1}| = |A^3|\cdot|B^{-1}| = |A|^3\cdot\frac{1}{|B|} = 4^3\cdot\frac{1}{-4} = -16$

$|B|=\begin{vmatrix}2&1&2\\0&-1&5\\0&0&2\end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 2 = -4$

Triangular