MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2013 A**
PROBLEMA 13

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$, donde a, b y c son tres números reales. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación que deben verificar los números a, b y c para que el sistema sea compatible. (4 *puntos*).

b) La solución del sistema cuando $a=-1$, $b=2$ y $c=3$. (2 *puntos*).

c) La solución del sistema cuando los números a, b y c verifican la relación $a=c=-2b$. (4 *puntos*).

a) Para que un sistema sea compatible, el rango de la matriz de coeficientes debe coincidir con el rango de la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -8+5=-3 \neq 0 \rightarrow rg A = 2$$

$\Rightarrow$ Para que rg A' sea 2, el determinante de A' deberá ser 0:

$$A'=\begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix} \rightarrow |A'| = -8c+10b-a-(-8a+2b-5c) = 7a+8b-3c=0$$

Solución: $7a+8b-3c=0$

b) $a=-1, b=2, c=3$. Comprobamos la compatibilidad:

$$7\cdot(-1)+8\cdot 2-3\cdot 3 = -7+16-9=0 \checkmark$$

$$\left.\begin{matrix} 2x+5y=-1 \\ -x-4y=2 \\ 2x+y=3 \end{matrix}\right\} \equiv \left.\begin{matrix} 2x+5y=-1 \\ -x-4y=2 \end{matrix}\right\} \equiv \left.\begin{matrix} 2x+5y=-1 \\ -2x-8y=4 \end{matrix}\right\}$$

$$/ \quad -3y=3 \rightarrow y=-1$$

$$-x-4(-1)=2 \rightarrow x=2$$

c) $a=c=-2b$ Comprobamos la compatibilidad:

$$7a+8b-3c = 7(-2b)+8b-3(-2b) = -14b+8b-6b=0 \checkmark$$

$$\left.\begin{matrix} 2x+5y=-2b \\ -x-4y=b \\ 2x+y=-2b \end{matrix}\right\} \equiv \left.\begin{matrix} 2x+5y=-2b \\ -x-4y=b \end{matrix}\right\} \equiv \begin{matrix} 2x+5y=-2b \\ -2x-8y=2b \end{matrix}$$

$$/ \quad -3y=0$$

$$y=0 \rightarrow -x-0=b$$

$$x=-b$$