MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **SEPTIEMBRE 2012 B**
PROBLEMA 12

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y B, donde B es una matriz de dos filas y dos columnas que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación $B^2=-7B+U$.

Obtener **razonadamente**:

a) Los números reales a y b tales que $A^2=aA+bU$. (*4 puntos*).

b) Los números reales p y q tales que $B^{-1}=pB+qU$ (*2 puntos*), **justificando** que la matriz B tiene inversa (*2 puntos*).

c) Obtener los valores x e y para los que se verifica que $B^3=xB+yU$. (*2 puntos*).

a) $a,b \,/\, A^2=aA+bU$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2 = a\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -a\\ a & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & -a\\ a & a+b\end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{l}0=a+b\\ -2=-a\\ 2=a\\ 0=a+b\end{array}\right\} \begin{array}{l}\rightarrow b=-2\\ \rightarrow a=2\\ \rightarrow \checkmark\end{array}$$

b) $p,q \,/\, B^{-1}=pB+qU$

Sabemos: $B^2=-7B+U$

$$B^2+7B=U$$

$$B(B+7U)=U \longrightarrow B^{-1}=B+7U$$

$$p=1 \qquad q=7$$

c) $x,y \,/\, B^3=xB+yU$

$$B^3=B\cdot B^2=B(-7B+U)=-7B^2+B=-7(-7B+U)+B$$

$$=49B-7U+B$$

$$=50B-7U \qquad x=50$$

$$y=-7$$