MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2012 B**
PROBLEMA 10

Problema B.1. Obtener **razonadamente:**

a) Todas las soluciones $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. (*4 puntos*).

b) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación $B^2 = B$. (*3 puntos*).

c) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene cuatro filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sabiendo además que el determinante de A es positivo. (*3 puntos*).

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

No tiene inversa

Por lo que tendremos que desarrollar la ecuación matricial como un sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x+2z \\ x+y+3z \\ x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2z=1 \\ x+y+3z=3 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{GAUSS}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-2} \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2z=1 \\ y+z=2 \end{array}\right\}$$

$z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

$y=2-\lambda$

$x=1-2\lambda$

b) $B \,/\, B^2=B \rightarrow |B^2|=|B|$

$\rightarrow |B|^2-|B|=0 \rightarrow |B|(|B|-1)=0$ → $|B|=1$; → $\cancel{|B|=0}$ No puede ser porque $B^{-1}\exists$

$$\boxed{|B|=1}$$

c) $A^2-9I=0$

$|A|$?

$A^2=9I \rightarrow |A^2|=|9I| \rightarrow |A|^2=9^4 \rightarrow |A|=9^2=81$

descartamos -9^2 (se indica que sea positivo)