MATEMÁTICAS II C

ÁLGEBRA **JUNIO 2012 A**

PROBLEMA 9

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $S: \begin{cases} 2x + \alpha^2 z = 5 \\ x + (1-\alpha)y + z = 1 \\ x + 2y + \alpha^2 z = 1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando $\alpha = 0$. (*3 puntos*).

b) Todas las soluciones del sistema S cuando $\alpha = -1$. (*4 puntos*).

c) El valor de α para el que el sistema S es incompatible. (*3 puntos*).

a) Si $\alpha = 0$

$$\begin{cases} 2x = 5 \longrightarrow x = 5/2 \\ x - y + z = 1 \longrightarrow 5/2 + 3/4 + z = 1 \longrightarrow z = -3/4 \\ x + 2y = 1 \longrightarrow 5/2 + 2y = 1 \to y = -3/4 \end{cases}$$

b) Si $\alpha = -1$

$$\begin{cases} 2x + z = 5 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \to \quad x = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$2\lambda + z = 5$

$z = 5 - 2\lambda$

$\lambda + 2y + 5 - 2\lambda = 1$

$2y = \lambda - 4$

$y = \frac{\lambda}{2} - 2$

c) Discutimos el sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha^2 & 5 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 & 1 \end{array}\right)$$

(con A la matriz de las tres primeras columnas)

$|A| = 2\alpha^2(1-\alpha) + 2\alpha^2 - \left(\alpha^2(1-\alpha) + 4\right) =$

$= 2\alpha^2 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^3 - 4 =$

$= -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4 = 0$

	-1	3	0	-4
-1		1	-4	4
	-1	4	-4	0

$\alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{-2} = 2$

Si $\alpha \neq -1, 2$ $\quad |A| \neq 0$ $\quad rg A = 3$

$A \subset A'$, $rg A' \leq 3 \to rg A' = 3$ $\quad \to$ Rouché S.C.D.

nº incógnitas $= 3$

Si $\alpha = -1 \to$ El sistema es SCI, por el apartado b

Si $\boxed{\alpha = 2} \to A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 12 & 15 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 12 & 6 \end{array}\right)$

$rg A' = 3 \neq 2 = rg A \to$ Rouché S.I.