MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2011 B**
PROBLEMA 6

Problema B.1. Se da la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{pmatrix}$, donde m es un parámetro real.

a) Obtener **razonadamente** el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m. (*5 puntos*).

b) **Explicar** por qué es invertible la matriz A cuando $m=1$. (*2 puntos*).

c) Obtener **razonadamente** la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m=1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. **Comprobar** que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz unidad. (*3 puntos*).

a) $|A| = -m(m^2-1)-(2m) = -m^3+m-2m = -m^3-m \overset{?}{=} 0 \rightarrow -m(m^2+1)=0$
$\rightarrow m=0$

Si $m\neq 0 \rightarrow |A|\neq 0 \rightarrow rg\,A=3$

Si $m=0 \rightarrow A=\begin{pmatrix}\boxed{-1 \quad 0} & 1\\ 0 & 0 & 0\\ \boxed{2 \quad 1} & -1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1\neq 0 \rightarrow rg\,A=2$

b) Si $m=1\neq 0 \rightarrow |A|\neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

c) Si $m=1 \rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad |A| = -m^3-m = -(1)^3-(1) = -2$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad (Adj(A))^T = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1+1 & 1\end{pmatrix} = I_3$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1+1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} = I_3$$