MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2011 A**
PROBLEMA 5

Problema A.1. Sea el sistema de ecuaciones

$$S:\begin{cases} x+y+z=m \\ 2x+3z=2m+1 \\ x+3y+(m-2)z=m-1 \end{cases},$$

donde m es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Todas las soluciones del sistema S cuando $m=2$. (*4 puntos*).

b) Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única. (*2 puntos*).

c) El valor de m para el que el sistema S admite la solución $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. (*4 puntos*).

a) $m=2$ $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3z=5 \\ x+3y=1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right)$ SCI

$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3z=5 \end{array}\right\}$ $z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

$2x+3\lambda=5 \rightarrow x=\dfrac{5-3\lambda}{2}$

$\rightarrow \dfrac{5-3\lambda}{2}+y+\lambda=2 \rightarrow y=2-\dfrac{5-3\lambda}{2}-\lambda=\dfrac{4-5+3\lambda-2\lambda}{2}=\dfrac{\lambda-1}{2}$

b) $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{array}\right)$, con A la matriz de los coeficientes $\underbrace{}_{A}$

$|A|=6+3-(9+2(m-2))=-2m+4=0 \rightarrow m=2$

$\rightarrow$ Si $m\neq 2$ $|A|\neq 0$ $rgA=3$
Como $A\subset A'$ y $rgA'\leq 3 \rightarrow rgA'=3$
nº incógnitas $=3$
$\rightarrow$ Rouché: S.C.D.

c) $\begin{cases} x+y+z=m \\ 2x+3z=2m+1 \\ x+3y+(m-2)z=m-1 \end{cases}$

$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+0=m \longrightarrow m=1$

Comprobamos que las otras ecuaciones son válidas:

$2\frac{3}{2}+3\cdot 0=2\cdot 1+1 \rightarrow 3=3$ ✓

$\frac{3}{2}-3\frac{1}{2}+0=1-1 \rightarrow 0=0$ ✓

$\boxed{m=1}$