MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **SEPTIEMBRE 2010 A**
PROBLEMA 3

Problema A.1.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \alpha x + \alpha^3 y + z = 1 \\ \alpha x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha^3 x + \alpha y + z = 1 \end{cases}$ donde α es un parámetro real, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado. (*4 puntos*).
b) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible indeterminado. (*3 puntos*).
c) Resolver el sistema en todos los casos en que es compatible indeterminado. (*3 puntos*).

a)
$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} \alpha & \alpha^3 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right.\right)$$

$$|A| = \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^2 - (\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^4) =$$
$$= \alpha^6 - 2\alpha^4 + \alpha^2 = 0 \to \alpha^2(\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1) = 0 \to \alpha = 0$$
$$\alpha^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \to \alpha = \pm 1$$

Si $\alpha \neq 0, 1, -1 \to |A| \neq 0 \to rg\, A = 3$
Como $A \subset A'$ y $rg\, A' \leq 3 \to rg\, A' = 3$
nº incógnitas $= 3$
$\to$ Rouché: SCD

b) Si $\alpha = 0 \to A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$rg\, A = rg\, A' = 1 \neq 3 =$ nº incógnitas $\to$ Rouché: S.C.I.

Si $\alpha = 1 \to A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$rg\, A = rg\, A' = 1 \neq 3 =$ nº incógnitas $\to$ Rouché: S.C.I.

Si $\alpha = -1 \to A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$rg\, A = rg\, A' = 1 \neq 3 =$ nº incógnitas $\to$ Rouché: S.C.I.

$\Longrightarrow$ Si $\alpha = 0, 1, -1 \to$ S.C.I.

c) Resolución de casos S.C.I.

$\alpha = 0$: $z = 1$, $x = \lambda$, $y = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\alpha = 1$: $x + y + z = 1$
$x = \lambda$, $y = \mu$, $z = 1 - \lambda - \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\alpha = -1$: $-x - y + z = 1$
$x = \lambda$, $y = \mu$, $z = 1 + \lambda + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$