MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **JUNIO 2010 A**
PROBLEMA 1

Problema A.1. Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Calcular las matrices $(A-I)^2$ y $A(A-2I)$. (*4 puntos*).

b) Justificar razonadamente que

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $A-2I$. (*2 puntos*).

b.2) No existe matriz inversa de la matriz $A-I$. (*2 puntos*).

c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1} = \lambda(A-2I)$. (*2 puntos*).

a) $$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

$$A(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$$

b) b.1) $$A(A-2I) = -I$$

$$A(-A+2I) = I \qquad\qquad -A\cdot(A-2I) = I$$

$$A^{-1} = -A+2I \qquad\qquad (A-2I)^{-1} = -A$$

b.2) $$A-I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$|A-I| = 0$ $(F_2 = 2F_1) \rightarrow$ No existe $(A-I)^{-1}$

c) $A^{-1} = -A+2I = -1(A-2I) \rightarrow \lambda = -1$