| **PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT** | PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD |
|---|---|
| **CONVOCATÒRIA: JUNY 2011** | CONVOCATORIA: JUNIO 2011 |
| **MATEMÀTIQUES II** | MATEMÁTICAS II |

**BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.**
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

# OPCIÓ A

**Problema A.1.** Siga el sistema d'equacions

$$S: \begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m+1 \\ x + 3y + (m-2)z = m-1 \end{cases},$$

on $m$ és un paràmetre real. Obtingueu **raonadament**:

a) Totes les solucions del sistema $S$ quan $m = 2$. (*4 punts*).

b) Tots els valors de $m$ per als quals el sistema $S$ té una solució única. (*2 punts*).

c) El valor de $m$ per al qual el sistema $S$ admet la solució $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$. (*4 punts*).

**Problema A.2.** En l'espai es donen les rectes $r: \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ i $s: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$. Obtingueu **raonadament**:

a) Un punt i un vector director de cada recta. (*3 punts*).

b) La posició relativa de les rectes $r$ i $s$. (*4 punts*).

c) L'equació del pla que conté a $r$ i és paral·lel a $s$. (*3 punts*).

**Problema A.3.** Siga $f$ la funció definida per $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$. Obtingueu **raonadament**:

a) El domini i les asímptotes de la funció $f(x)$. (3 *punts*).

b) Els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$. (4 *punts*).

c) La integral $\int f(x)dx = \int \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$. (3 *punts*).

# OPCIÓ B

**Problema B.1.** Es dóna la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$, on $m$ és un paràmetre real.

a) Obtingueu **raonadament** el rang o característica de la matriu $A$ en funció dels valors de $m$. (*5 punts*).
b) **Expliqueu** per què és invertible la matriu $A$ quan $m=1$ . (*2 punts*).
c) Obtingueu **raonadament** la matriu inversa $A^{-1}$ de $A$ quan $m=1$, i indiqueu els distints passos per a l'obtenció de $A^{-1}$. **Comproveu** que els productes $AA^{-1}$ i $A^{-1}A$ donen la matriu unitat. (*3 punts*).

**Problema B.2.** En l'espai es donen les rectes $r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases}$ i $s: \{ x-1=y=z-3$. Obtingueu **raonadament**:

a) Un vector director de cada una de dites rectes $r$ i $s$. (*2 punts*).
b) L'equació del pla perpendicular a la recta $r$ que passa pel punt $(0,1,3)$. (*3 punts*).
c) El punt d'intersecció de les rectes $r$ i $s$ (*2 punts*) i l'equació del pla $\pi$ que conté aquestes rectes $r$ i $s$. (*3 punts*).

**Problema B.3.** Es desitja construir un camp rectangular amb vèrtexs *A*, *B*, *C* i *D* de manera que:
Els vèrtexs $A$ i $B$ siguen punts de l'arc de la paràbola $y=4-x^2$, $-2 \le x \le 2$, i el segment d'extrems *A* i *B* és horitzontal.
Els vèrtexs $C$ i $D$ siguen punts de l'arc de la paràbola $y=x^2-16$, $-4 \le x \le 4$, i el segment d'extrems *C* i *D* és també horitzontal.
Els punts *A* i *C* han de tindre la mateixa abscissa, el valor de la qual és el nombre real positiu *x*.
Els punts *B* i *D* han de tindre la mateixa abscissa, el valor de la qual és el nombre real negatiu –*x*.
Es demana obtindre **raonadament**:

a) L'expressió $S(x)$ de l'àrea del camp rectangular en funció del nombre real positiu $x$. (*4 punts*).
b) El nombre real positiu $x$ per al qual l'àrea $S(x)$ és màxima. (*4 punts*).
c) El valor de l'àrea màxima. (*2 punts*).

**BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.**
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

# OPCIÓN A

**Problema A.1.** Sea el sistema de ecuaciones

$$S: \begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m+1 \\ x + 3y + (m-2)z = m-1 \end{cases},$$

donde $m$ es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Todas las soluciones del sistema $S$ cuando $m = 2$. (*4 puntos*).

b) Todos los valores de $m$ para los que el sistema $S$ tiene una solución única. (*2 puntos*).

c) El valor de $m$ para el que el sistema $S$ admite la solución $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$. (*4 puntos*).

**Problema A.2.** En el espacio se dan las rectas $r: \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$. Obtener **razonadamente**:

a) Un punto y un vector director de cada recta. (*3 puntos*).

b) La posición relativa de las rectas $r$ y $s$. (*4 puntos*).

c) La ecuación del plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$. (*3 puntos*).

**Problema A.3.** Sea $f$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$. Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. (3 *puntos*).

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. (4 *puntos*).

c) La integral $\int f(x)dx = \int \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$. (3 *puntos*).

# OPCIÓN B

**Problema B.1.** Se da la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{pmatrix}$, donde $m$ es un parámetro real.

a) Obtener **razonadamente** el rango o característica de la matriz $A$ en función de los valores de $m$. (*5 puntos*).

b) **Explicar** por qué es invertible la matriz $A$ cuando $m=1$. (*2 puntos*).

c) Obtener **razonadamente** la matriz inversa $A^{-1}$ de $A$ cuando $m=1$, indicando los distintos pasos para la obtención de $A^{-1}$. **Comprobar** que los productos $AA^{-1}$ y $A^{-1}A$ dan la matriz unidad. (*3 puntos*).

**Problema B.2.** En el espacio se dan las rectas $r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=3\end{cases}$ y $s:\{\,x-1=y=z-3$. Obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de cada una de dichas rectas $r$ y $s$. (*2 puntos*).

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta $r$ que pasa por el punto $(0,1,3)$. (*3 puntos*).

c) El punto de intersección de las rectas $r$ y $s$ (*2 puntos*) y la ecuación del plano $\pi$ que contiene a estas rectas $r$ y $s$. (*3 puntos*).

**Problema B.3.** Se desea construir un campo rectangular con vértices *A*, *B*, *C* y *D* de manera que:
Los vértices $A$ y $B$ sean puntos del arco de la parábola $y=4-x^2$, $-2\le x\le 2$, y el segmento de extremos *A* y *B* es horizontal.
Los vértices $C$ y $D$ sean puntos del arco de la parábola $y=x^2-16$, $-4\le x\le 4$, y el segmento de extremos *C* y *D* es también horizontal.
Los puntos *A* y *C* deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real positivo *x*.
Los puntos *B* y *D* deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real negativo *–x*.
Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión $S(x)$ del área del campo rectangular en función del número real positivo $x$. (*4 puntos*).

b) El número real positivo $x$ para el que el área $S(x)$ es máxima. (*4 puntos*).

c) El valor del área máxima. (*2 puntos*).